Capitolo 3

Problemi di secondo grado

3.1 Euclide e l'algebra che non c'è

Nel pensare a risultati o concetti importanti presenti negli *Elementi* di Euclide siamo ricondotti alla teoria delle proporzioni, all'algoritmo della divisione, all'infinità dei numeri primi o, ancora, al postulato delle parallele. Il pensiero non corre invece all'algebra, anche perché non si trovano formalizzazioni simili alla nostra. A parlare di un'algebra dei greci fu Nesselmann nel 1842 che scorse in alcuni loro procedimenti geometrici le tracce di algoritmi algebrici. Verso la fine del XIX secolo, Hieronyimous Georg Zeuthen (1839-1920) e Paul Tannery (1843-1904) diffusero l'opinione di Nesselmann e coniarono il nome di *algebra geometrica* per questo calcolo geometrico. Curiosamente, come notato dallo storico della matematica italiano Ettore Bortolotti (1866-1947) [4], in alcuni manoscritti risalenti al XVI secolo il termine algebra geometrica era già stato usato con la stessa connotazione: precisamente, *Algebra Geometrica* è il titolo di un opuscolo manoscrittto di Paolo Bonasoni che fu lettore di aritmetica e geometria presso lo studio di Bologna dal 1587 al 1593 [3]. Prima ancora però, un contemporaneo di al-Khuwaritzmi, Thābit ibn Qurra (836-901) aveva osservato come la soluzione delle equazioni di secondo grado fosse equivalente alla applicazione di aree con eccesso o difetto presentata da Euclide nel libro VI degli *Elementi*. ([8], p.205).

Senza alcuna pretesa di fornire una ricostruzione storica, Roger Herz-Fischler [2], interessandosi alla storia della sezione aurea, parla ancora di algebra geometrica come veste moderna dei risultati di Euclide. Herz-Fischler distinse tre livelli ai algebra geometrica. Come esempio di algebra geometrica di I livello od elementare si può considerare la Proposizione II.1[1] del Libro II degli Elementi [5]

Qualora si diano due rette, e l'una o l'altra di esse sia secata in quanti mai si voglia segmenti, il rettangolo compreso dalle due rette è uguale ai rettangoli

[1] Qui e nel seguito indicherò le proposizioni tratte dagli *Elementi* con due numeri: uno romano per il libro ed uno ordinario per la numerazione all'interno del capitolo

compresi sia dalla retta non secata che da ciascuno dei segmenti ([5], p. 849)

Su un segmento assegnato BC (3.1) si considerino due punti D ed E arbitrari. La proposizione afferma che il rettangolo di lati BG e BC è equivalente alla somma dei rettangoli aventi tutti altezza BG e basi BD, DE, EC. Un attimo di riflessione permette di dare una veste algebrica a questa proposizione: posto $BG = a$, $BD = b$, $DE = c$, $EC = d$ si ha

$$a(b + c + d + \cdots) = ab + ac + ad + \cdots$$

che traduce la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma. Questa proposizione non viene mai utilizzata negli *Elementi*.

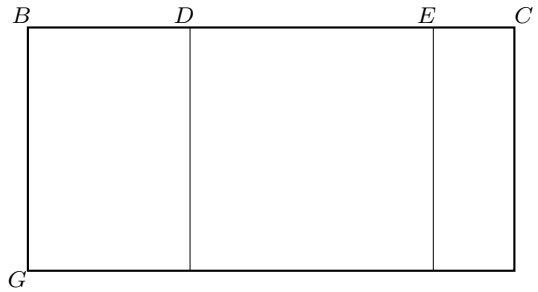

Figura 3.1: Schema della dimostrazione della Proposizione II.1 degli *Elementi* di Euclide.

Ecco le ragioni addotte da Bartel L. van der Waerden (1903-1996), uno dei maggiori sostenitori della tesi dell'algebra geometrica, a favore di un'interpretazione algebrica di questo teorema:

Dal punto di vista geometrico, questo teorema afferma soltanto che ogni rettangolo è suddivisibile in più rettangoli grazie a rette parallele ad uno dei lati. Questo è evidente: ognuno lo riesce a vedere guardando solo la figura. Nell'ambito della geometria non c'è bisogno di questo teorema: Euclide non lo utilizza mai nei primi quattri libri.

Se però uno inizia dalle operazioni algebriche di addizione e moltiplicazione e si domanda: come si deve moltiplicare una somma per una quantità a? La risposta è: moltiplica i termini della somma per a e somma i risultati. Se questa regola di calcolo si traduce in linguaggio geometrico, si ottiene la Prop. II.1. Altrimenti detto, la Prop. II.1 fornisce una dimostrazione geometrica di una regola di calcolo algebrico. ([8]. p.204)

Per Herz-Fischler, negli *Elementi* si incontra dell'algebra geometrica di II livello quando vengono dimostrate geometricamente identità algebriche che possono essere utilizzate nella risoluzione di equazioni. A questo livello egli colloca, ad esempio, la Proposizione II.4.

Sia C un punto arbitrario sul segmento AB. Allora il quadrato costruito su AB equivale alla somma del quadrato costruito su AC, del quadrato costruito su CB e al doppio del rettangolo di lati AC e CB.

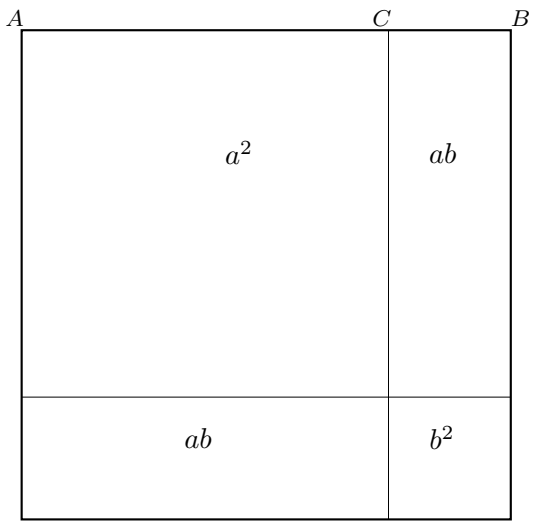

Figura 3.2: Schema della dimostrazione della Proposizione II.4 degli *Elementi* di EUCLIDE.

Uno sguardo alla Figura 3.2 consente di dare una veste algebrica a questa proposizione: posti $AC = a$ e $CB = b$, essa afferma che

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab,$$

cioè la formula dello sviluppo del quadrato di un binomio. Un discorso analogo si può effettuare per le Propoposizioni II.5 e II.6. Ecco il testo di quest'ultima proposizione. Seguendo [2] indicherò con $\mathcal{R}(a,b)$ il rettangolo di lati a e b e con $\mathcal{Q}(a)$ il quadrato di lato a:

Sia AB una retta data e C il suo punto medio. Si prolunghi AB con la retta BD. Allora

$$\mathcal{R}(AD, DB) + \mathcal{Q}(CB) \equiv \mathcal{Q}(CD)\,.$$

Dim. Si consideri (3.3) il quadrato $CDFE$ e si tracci il segmento DE che determina i punti K, H ed M indicati in figura. Ora

$$\mathcal{R}(AD, DB) = \mathcal{R}(AD, DM) \equiv \mathcal{Q}(BD) + \mathcal{R}(AC, AK) + \mathcal{R}(CB, BH)$$

dove $\mathcal{R}(AC, AK) = \mathcal{R}(CB, BH)$ poiché C è il punto medio di AB. D'altra parte per la Prop. I.43[2] si ha l'equivalenza di $\mathcal{R}(HM, MF)$ e $\mathcal{R}(CB, BH)$ per cui abbiamo

$$\mathcal{R}(AD, DB) = \mathcal{R}(AD, DM) \equiv \mathcal{Q}(BD) + \mathcal{R}(HM, MF) + \mathcal{R}(CB, BH).$$

[2]Prop. I.43: I completamenti dei parallelogrammi intorno alla diagonale di ogni parallelogrammi sono uguali tra loro. ([5], p.837)

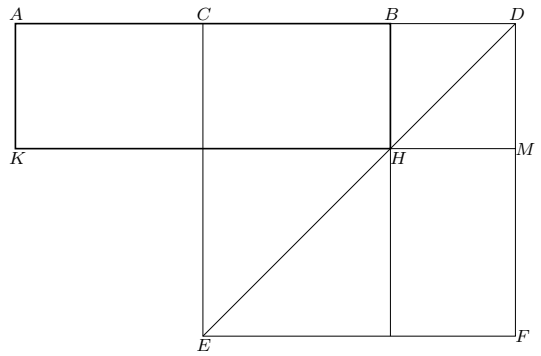

Figura 3.3: Schema della dimostrazione della Proposizione II.6 degli *Elementi* di EUCLIDE.

Poiché l'area del membro di destra è la differenza $\mathcal{Q}(CD) - \mathcal{Q}(CB)$, il teorema è dimostrato.

Algebricamente, se si pone $AD = y$, $BD = x$ cosicché $CB = \frac{y-x}{2}$, il teorema equivale a dimostrare che

$$xy + \left(\frac{y-x}{2}\right)^2 = \left(\frac{y+x}{2}\right)^2,$$

di verifica immediata.

Infine al terzo livello, quello superiore, si collocano problemi di applicazione di area, tra cui è interessante per noi quello contenuto nella Prop. VI.28.

Applicare ad un assegnato segmento AB un parallelogramma eguale ad una data figura rettilinea e mancante di una figura a forma di parallelogramma, simile a quello assegnato: quindi la figura rettilinea assegnata non deve essere più grande del parallelogramma descritto su metà del segmento e simile al difetto. ([6], p.96)

La dimostrazione di Euclide, nella versione di Unguru [6], è questa. Si bisechi AB in E (Fig. 3.4) e su EB si costruisca il parallelogramma EF[3] simile a D e similmente collocato. Si completi il parallelogramma AG. Ora, se quest'ultimo parallelogramma è equivalente alla figura C assegnata, il problema è risolto. In caso contrario l'unica possibilità che rimane, visto il *diorisma* (*διορισμός*, delimitazione), è che area(AG) = area(GB) > area(C). Si costruisca un parallelogramma $KLMN$ simile a D ed equivalente al tempo stesso alla differenza tra GB e C: la possibilità di una tale costruzione era stata mostrata nella Proposizione VI.25.[4] I parallelogrammi KM e GB sono entrambi simili a D e dunque simili tra loro e siano GE e KL, GF ed LM coppie di lati corrispondenti. Poiché

[3]Nel seguito indicherò un parallelogramma anche ricorrendo ad una coppia di vertici opposti.

[4]Prop. VI.25: Costruire una figura rettilinea che sia simile ad una figura rettilinea data e che abbia la stessa area di un'altra figura rettilinea data.

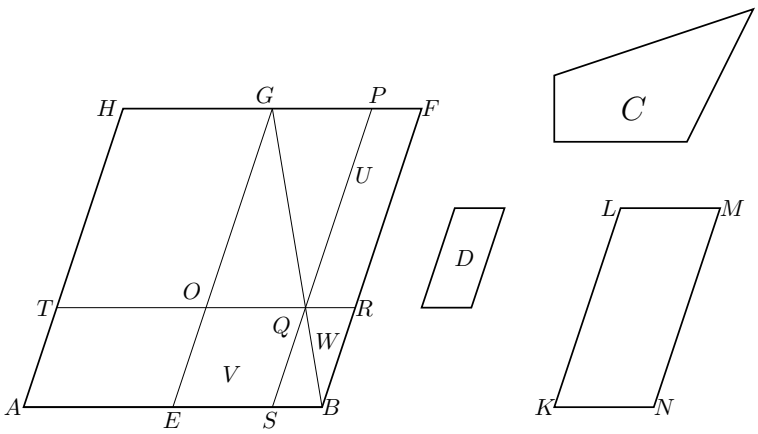

Figura 3.4: Schema della dimostrazione della Proposizione VI.28 degli *Elementi* di Euclide.

per costruzione area(GB) = area(C) + area(KM), si conclude che

$$GE > KL \qquad \text{e} \qquad GF > LM.$$

Considerati i segmenti $GO = KL$ e $GP = LM$ e costruito il parallelogramma $GOPQ$ che, essendo congruente a KM e simile a GB, ha il vertice Q sulla diagonale GB (Prop. VI.26), si tracci questa diagonale. Poiché area(GB) = C) + area(KM) e area(GQ) = area(KM), lo gnomone UVW è equivalente a C. Poiché infine, per la Prop. I.43, i parallelogrammi PR ed OS sono equivalenti, tali debbono essere i parallelogrammi PB ed OB. Quest'ultimo è però equivalente a TE (Prop. I.36), visto che E è il punto medio di AB. In conclusione i parallelogrammi TE ed OB sono equivalenti ed il parallelogramma TS è equivalente allo gnomone $UWV \equiv C$ ed è quello cercato.

Se ora vestiamo i panni dell'algebrista moderno ([9], pp. 150-155; [10]), questo procedimento equivale alla soluzione di un'equazione di secondo grado ed il *diorisma* enunciato equivale alla condizione di realtà delle radici. Osserviamo che i dati del problema sono $AB = a$, l'angolo acuto α interno al parallelogramma D ed il rapporto b/c tra KN e KL: infatti del parallelogramma $KLMN$ sappiamo solo che è simile a D. Posto $QS = x$ ed indicato per semplicità $m := \sin\alpha$ e l'area di C con $m\mathcal{C}$, dalla similitudine tra i parallelogrammi $KLMN$ e $QSBR$ segue $QS : BS = KL : KN$ da cui si ottiene $BS = \frac{b}{c}x$ e dunque l'area del parallelogramma TS è $mx\left(a - \frac{b}{c}x\right)$ per cui x risolve l'equazione

$$\frac{b}{c}x^2 - ax + \mathcal{C} = 0$$

e la condizione di realtà delle radici è proprio quella formulate verbalmente nell'enunciato del teorema.

Ma... è algebra veramente o no? A partire dalla diffusione di questa opinione, pochi sono stati gli studiosi che l'hanno contraddetta: tra questi Jacob Klein,

negli anni '30 ed il filologo ungherese Árpad Szabó. Un attacco frontale violento alla ricostruzione dominante a partire da Nesselmann fu portato nel 1975 da Sabetai Unguru [6] il cui lavoro accese una rovente polemica sull'esistenza di un'algebra dei greci pre-euclidei e di Euclide: la *querelle* non riguarda Diofanto. Unguru afferma:

La geometria greca non è algebra (geometrica o d'altro tipo) ma semplicemente geometria. Chiaramente, poiché vi è (e ciò è ovvio per noi) un completo isomorfismo tra geometria e algebra (che cosa se non questo è il messaggio della geometria analitica?) è sempre possibile usare tecniche algebriche per trasferire le forme e strutture geometriche nelle loro controparti algebriche, analitiche. Su questo non c'è disaccordo. Tuttavia **non** *è questo il punto storiograficamente cruciale! Il punto storiograficamente cruciale è che in questo processo di traslazione si commette una irreparabile violenza e si infligge un danno incorreggibile ai tratti specifici, peculiari, sui generis, della geometria greca che non sono, mi si passi l'enfasi, riconducibili a qualcosa di più semplice, meno arzigogolato, ecc. Non vi è nulla di arzigogolato, intricato, pesante e via discorrendo circa la matematica greca quando questa non viene strappata dal suo contesto.* (*cfr.* [7], p. 113)[5]

Per i sostenitori dell'algebra geometrica, il sostrato algebrico nascosto dietro risultati come la Prop. VI.28, più che essere l'obiettivo finale cui tendono i ragionamenti geometrici, sembra rappresentare un retaggio della tradizione babilonese da cui i matematici greci avevano potuto trarre informazioni sulla risoluzione di problemi di primo e secondo grado che, in epoca aurea, sono stati tradotti in più o meno sofisticate costruzioni geometriche. A fare da spartiacque tra questi due momenti vi è la teoria delle proporzioni di Eudosso che, resa indipendente dal concetto di grandezze incommensurabili, permise di portare avanti una trattazione logicamente rigorosa dei problemi di secondo grado [4]. Al contrario, proprio l'estrema facilità nell'ottenere alcuni risultati degli *Elementi* quando rivestiti del linguaggio algebrico o addirittura la banalità di alcuni dei risultati presentati, una volta formulati in tale linguaggio fa dubitare Unguru del fatto che il fondo al loro cuore, Euclide ed i Greci fossero algebristi: se vi era questa consapevolezza, perché tenerla nascosta, occultandola dietro a ragionamenti geometrici certo eleganti ma che rendono il procedimento più pesante? Questa pesantezza è percepita tale, prosegue Unguru, solamente se ci si accosta con occhi *moderni* al testo euclideo e gli si impongono categorie interpretative valide 2000 anni dopo Euclide.

[5] Greek geometry is not algebra (geometric or otherwise) but simply geometry. Clearly, since there is (and this is obvious for us) a complete isomorphism between geometry and algebra–what else if not this is the message of analytic geometry?–, one can practically always use algebraic techniques for transferring the geometrical form and structure to their algebraic, analytical counterparts. There is no quarrel about this. However this is **not** the crucial historiographical point! The crucial historiographical point is that in this transfer-process one does irreparable violence and inflicts unrectifiable damage to the unique, peculiar and sui generis traits of Greek geometry which are not, let me state this emphatically, reducible to something 'simpler', less 'clumsy', etc. There is nothing 'clumsy', 'awkward', 'cumbersome', and so forth about Greek mathematics when it is not taken out of its own context. ([6], p.88)

Bisogna dire che al centro della polemica innescata da Unguru vi è una concezione piuttosto ristretta di algebra o, meglio, di pensiero algebrico. Appoggiandosi su uno studio di Michael S. Mahoney del 1971, Unguru enuclea tre caratteristiche salienti del modo di pensare algebrico:

1. Simbolismo operazionale;
2. l'attenzione più alle relazioni matematiche che agli oggetti matematici perché le strutture degli insiemi sono il frutto di tali relazioni;
3. libertà da ogni restrizione e problema ontologico e, collegato a questo punto, la prevalenza dell'astrazione sull'intuizione. (*cfr.* [6], p.77)

Aderendo strettamente a questa visione, la storia dell'algebra potrebbe tranquillamente iniziare nel XVIII secolo con Lagrange nei cui lavori si nascondono i germi del concetto di gruppo poi ripreso da Ruffini e sfruttato da Galois (cui si deve il nome di gruppo) e Cauchy. A questa posizione van der Waerden contrappone un'altra definizione di algebra nella sua difesa dall'attacco di Unguru [8]:

l'arte di manipolare espressioni algebriche come $(a+b)^2$ *e di risolvere equazioni come* $x^2 + ax = b$ nello spirito di Al-Khuwaritzmi (790- 850) e Cardano ed argomenta come, allargata la definizione in questo modo non vi sia nulla di inconsistente nell'attribuire un'interpretazione algebrica a risultati degli *Elementi*.

3.2 Il Libro X degli *Elementi*

Se l'algebra geometrica in Euclide è una costruzione ipotesi formulata secoli dopo, vi è un libro degli *Elementi*, il X, che ha giocato un ruolo non trascurabile nella storia delle equazioni algebriche, almeno come fonte di ispirazione per suggerire il modo con cui ottenere la soluzione delle equazioni di terzo grado. Il libro inizia con la distinzione tra grandezze commensurabili (*σύμμετρα*) ed incommensurabili, grandezze commensurabili *in potenza* (*δυνάμει σύμμετρα*) o incommensurabili in potenza. Due grandezze a e b sono commensurabili se hanno il rapporto che un numero m ha con un altro n, $a : b = m : n$; a e b sono commensurabili in potenza se

$$b = \sqrt{\frac{m}{n}}a$$

dove m/n *non* è un quadrato perfetto. Dunque due segmenti sono commensurabili in potenza se i quadrati costruiti su di essi sono misurati dalla stessa superficie (X.2) e si applica l'algoritmo della divisione ai segmenti per ottenerne un criterio di commensurabilità o meno e nel primo caso, per determinarne la comune misura, sulla scorta di quanto operato tra numeri nella proposizione VII.2: secondo alcuni, ad avere introdotto per primo questo procedimento sarebbe stato Teeteto, ricordato nell'omonimo dialogo platonico. Dopo aver affrontato una serie di problemi che, per i fautori dell'algebra geometrica, sono condizioni per

avere radici razionali di un'equazione di secondo grado, Euclide propone una classificazione degli irrazionali quadratici e biquadratici, l'argomento che più ci interessa. Tradotto in linguaggio moderno, Euclide cataloga irrazionali della forma ([9], pp. 9-11)

$$\sqrt{\sqrt{p} \pm \sqrt{q}}$$

in cui p e $q < p$ sono commensurabili. Esprimendo

$$\sqrt{\sqrt{p} + \sqrt{q}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

si ha

$$\sqrt{p} + \sqrt{q} = a + b + 2\sqrt{ab}$$

e, posto

$$a + b = \sqrt{p} \qquad 2\sqrt{ab} = \sqrt{q}$$

si ottiene $(a-b)^2 = p - q$ e dunque $a - b = \sqrt{p-q}$ da cui è possibile ricavare

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{p} + \frac{1}{2}\sqrt{p-q} \qquad b = \frac{1}{2}\sqrt{p} - \frac{1}{2}\sqrt{p-q}$$

cosicché

$$\sqrt{\sqrt{p} \pm \sqrt{q}} = \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{p} + \frac{1}{2}\sqrt{p-q}} + \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{p} - \frac{1}{2}\sqrt{p-q}} \tag{3.1}$$

e si possono distinguere vari casi, a seconda delle proprietà degli interi p e q:

- 1a) $p = r^2$ e $\sqrt{p-q}$ commensurabile con r
- 1b) $p = r^2$ e $\sqrt{p-q}$ incommensurabile con r
- 2a) $q = s^2$ e $\sqrt{p-q}$ commensurabile con $\sqrt{p}$
- 2b) $q = s^2$ e $\sqrt{p-q}$ incommensurabile con $\sqrt{p}$
- 3a) né p né q sono quadrati perfetti e $\sqrt{p-q}$ commensurabile con $\sqrt{p}$
- 3b)né p né q sono quadrati perfetti e $\sqrt{p-q}$ incommensurabile con $\sqrt{p}$.

Oltre a questi, si ha una classificazione parallela per irrazionali del tipo $\sqrt{\sqrt{p} - \sqrt{q}}$ e gli irrazionali ottenuti hanno nomi distinti. A titolo di esempio, ecco la definizione di *mediale*.

Prop. X. 21 *Il rettangolo contenuto da rette razionali commensurabili soltanto in potenza è irrazionale e il lato del quadrato ad esso equivalente è irrazionale. Si chiami questo linea mediale.* ([9], pp. 71-72)

I lati del rettangolo stanno tra loro come $\sqrt{a} : \sqrt{b}$, con $a : b$ razionale ma non un quadrato perfetto; siccome allora

$$a : \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a} : \sqrt{b}$$

anche $a : \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ è irrazionale e dunque, se a è razionale, $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ è irrazionale. La mediale è la quantità $\sqrt{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}} = \sqrt[4]{ab}$.

Il significato del libro X è stato reso nei modi più diversi: se nel secolo X Anarizio lo illustra riportando solo esempi numerici; dal XIII secolo, con Fibonacci, il libro X viene utilizzato per mostrare che una particolare equazione cubica non può essere risolta da alcuno degli irrazionali descritti in esso (*cfr.* Cap. 4); nella *Arithmetica Integra* del 1544 Stifel lo considera come teoria per il calcolo delle radici di quantità irrazionali e fornisce per queste le regole di calcolo; con gli algebristi italiani del XVI secolo, il libro X diverrà la fonte di ispirazione per risolvere le equazioni di terzo grado, attraverso una sua estensione al caso dei radicali cubici (Del Ferro, Bombelli); Cardano invece studierà nel dettaglio le equazioni di secondo, terzo e quarto grado che hanno per radici alcuni degli irrazionali euclidei. Idealmente, l'indagine iniziata da Euclide raggiungerà il culmine all'inizio del XIX secolo quando Ruffini ed Abel, per dimostrare l'impossibilità di risolvere in generale per radicali le equazioni di grado superiore al quarto, otterranno una forma per così dire canonica delle quantità irrazionali costruibili con estrazioni di radice.

3.3 Le equazioni di secondo grado attraverso la storia

a): civiltà babilonese

Problemi di secondo grado si trovano risolti da tempo remoto, almeno a partire dalla civiltà babilonese (ca. 1800-1600 a.C.), secondo la ricostruzione operata nel 1935 da Otto Neugebauer. Vediamo un esempio, tratto da [7], che illustri i tratti salienti dell'approccio al problema.

La superficie (e il lato) del quadrato ho sommato e fa 3/4. *Prendi il coefficiente 1 [numero dei lati]. Prendi la metà di 1. Tu hai* 1/2. *Moltiplica* 1/2 *per* 1/2 *(fa* 1/4*). Congiungi* 1/4 *con* 3/4 *e (fa) 1 che ha 1 come radice quadrata.* 1/2*, che tu hai moltiplicato per se stesso, sottrai da 1 e (fa)* 1/2 *(che) è il (lato del) quadrato.* (*cfr.* [7], p.74)

Si tratta dunque di risolvere l'equazione che oggi scriveremmo come $x^2 + x = \frac{3}{4}$ in cui x è il *lato del quadrato*. Seguendo passo dopo passo le indicazioni del testo, ci si accorge che si sta scrivendo

$$x = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} - \frac{1}{2},$$

che è quanto si otterrebe applicando la formula risolutiva generale al caso specifico in esame. Il testo enuncia l'equazione in chiave geometrica (si parla di superficie e di lati) un po' ardua da accettare: come è possibile sommare la superficie ed il lato di un quadrato? Se vi fosse stata presso i babilonesi un'adeguata mentalità algebrica che avesse permesso di passare dalle figure ai numeri, formare $x^2 + x$ non avrebbe creato eccessivi problemi. Come osservò Ettore

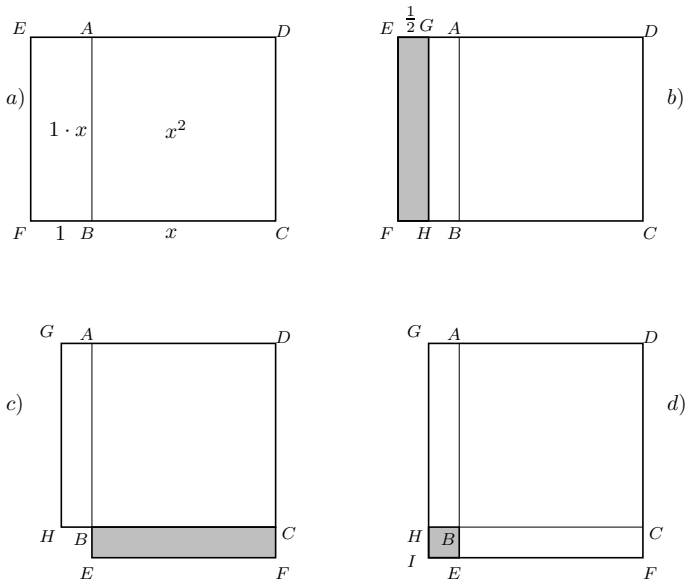

Figura 3.5: Costruzione geometrica fedele ai passaggi della soluzione di $x^2 + x = \frac{3}{4}$ come riportata in tavolette babilonesi.

Bortolotti nel 1936 sarebbe anacronistico attribuire tale livello di astrazione ad una civiltà che iniziava a fare matematica e dunque appariva plausibile pensare a *linee con spessore e superficie con altezza* permettendo non solo di formulare ma anche di risolvere *geometricamente* il problema. Nel caso dell'equazione proposta sopra, una possibile risoluzione geometrica potrebbe essere la seguente ([7], p.75): indicato con x il lato incognito di un quadrato $ABCD$ (Fig. 3.5) che dunque ha area x^2 si giustappone un rettangolo $ABFE$ di lati $AB = x$ e $BF = 1$: il rettangolo è il segmento spesso cui si alludeva poc'anzi. Si ottiene così il rettangolo $EDCF$ di superficie $x^2 + x$ che deve essere però uguale a $3/4$, per il testo del problema.

Se G è il punto medio di AE, cosicché $EG = AG = 1/2$ si può asportare il rettangolo $EGFH$–di lati $1/2$ ed x–e ricollocarlo con GH sovrapposto a BC. La figura a sei lati ora ottenuta si può *completare* aggiungendo un quadrato di lato $1/2$ in modo da formare il quadrato $GIFD$ che ha lato unitario perché la sua area è uguale ad $1 = 3/4 + 1/4$. Il lato di $GIFD$ è però anche uguale ad $x + 1/2$, per costruzione, e dunque si ricava $x = \frac{1}{2}$. Questo procedimento geometrico, qui solo ipotizzabile e che peraltro è affiancato da metodi più algebrici di risoluzione, verrà seguito esplicitamente dagli indiani.

Alla base di questa ricostruzione sta dunque la considerazione di *segmenti unitari*, uno strumento che si riaffaccerà molti secoli dopo nella storia delle equazioni algebriche. In ambito occidentale, il primo matematico a servirsene fu Fibonacci che, nel *Liber Abaci* (1202), considerò questo problema:

Sulla determinazione che un certo numero, tale che $\frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}$ *dello*

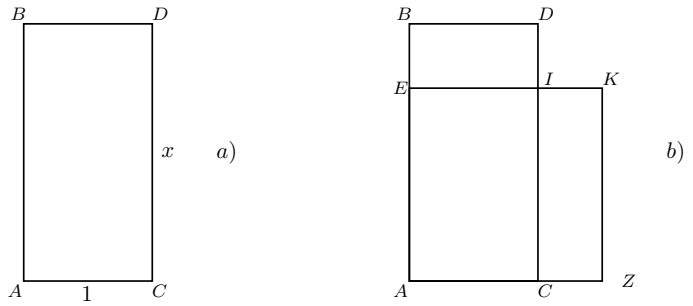

Figura 3.6: L'uso del segmento unitario nel *Liber Abaci* di Leonardo Pisano, del 1202.

stesso, sia uguale alla radice [quadrata] di tale numero. (*cfr.* [7], p. 92)

L'equazione è facile da scrivere: il numero incognito x deve soddisfare

$$\frac{19}{20}x = \sqrt{x}$$

ovvero

$$\left(\frac{19}{20}\right)^2 x^2 = x \tag{3.2}$$

e la soluzione non nulla è $x = (20/19)^2$. Fibonacci propone una soluzione geometrica, considerando un rettangolo $ABCD$ di altezza $AB = x$ e base $AC = 1$: x rappresenta allora anche l'*area* del rettangolo. Staccato da AB il segmento $AE = (19/20)AB = (19/20)x$ si costruisce il quadrato $AEKZ$ di lato AE che, interpretando geometricamente (3.2), deve essere equivalente al rettangolo $ABCD$. L'incognita x si può interpretare come l'area di $AEKZ$. Ora, dall'equivalenza di $ABCD$ con $AEKZ$ si deduce quella dei rettangoli $EBDI$ ed $ICZK$ che si può scrivere in forma di proporzione

$$CI : ID = EI : IK$$

ovvero, applicando la proprietà del comporre,

$$CI : CD = EI : EK.$$

Poiché però $CI : CD = 19/20$ per costruzione ed $EI = 1$ deve essere $EK = AE = 20/19$ e quindi $x = \left(\frac{20}{19}\right)^2$ è la soluzione di (3.2). L'uso sistematico del segmento unitario sarà ripreso oltre più di tre secoli dopo Fibonacci da Bombelli e da Cartesio e diverrà un modo per smarcare l'algebra dalla geometria.

b) Diofanto

In Grecia, troviamo soluzioni di problemi di secondo grado in Erone (I sec. d.C.) ed in Diofanto che, con Pappo, è il matematico più importante del cosiddetto periodo argenteo della matematica Greca, che si estende dal 250 al 350 circa. L'opera più nota di Diofanto è l'*Aritmetica*, originariamente articolata in

tredici libri, di cui solo sei pervenuti sino a noi. Diofanto è noto per i risultati di analisi indeterminata che però non possiamo esaminare in questa sede dove dobbiamo limitarci a qualche cenno sulla risoluzione di problemi di secondo grado e, nel prossimo capitolo, di un problema di terzo grado. I più semplici esempi di problemi di secondo grado si incontrano nel libro I e sono riconducibili alla forma somma-prodotto:

$$\begin{cases} x+y=s \\ xy=p \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y=d \\ xy=p \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=s \\ x^2+y^2=q: \end{cases} \tag{3.3}$$

dove s, d e q sono quantità assegnate. l'enunciato del primo problema è

Trovare due numeri tali che la loro somma ed il loro prodotto siano uguali a due numeri dati. È necessario tuttavia che il quadrato della semisomma dei numeri, superi il loro prodotto di un numero quadrato cosa che d'altronde è figurativa.

Anche qui vi è un diorisma che non solo elimina dalla considerazione un'eventuale radice immaginaria (assurda, $\acute{\alpha}\tau o\pi o\varsigma$) ma anche un'eventuale radice irrazionale (impossibile, $\acute{\alpha}\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau o\varsigma$).

Il metodo di risoluzione, illustrato su casi numerici consiste nel porre, per il sistema $(3.3)_1$,

$$x=\frac{s}{2}+t \qquad y=\frac{s}{2}-t$$

che rende automaticamente soddisfatta la $x+y=s$. Imponendo invece $xy=p$ si ha

$$(\frac{s}{2}+t)(\frac{s}{2}-t)=p$$

da cui si ottiene

$$t=\sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2-p}.$$

c) Matematici Indiani

Benché le equazioni siano risolte correttamente da Diofanto, non vi è traccia esplicita dell'enunciato della regola generale di risoluzione che si trova invece nella Sez. IV della *Brahme-Sphuta-Siddhanta*, il Sommario del verbo di Brahma. Qui ([7], p.131) l'autore, Brahmagupta, enuncia la formula risolutiva per l'equazione $ax^2-bx=-c$, con $b,c>0$ nella forma

Prendi il numero assoluto dalla parte opposta a quella dalla quale il quadrato e l'incognita semplice sono state sottratte. Al numero assoluto moltiplicato per quattro volte il quadrato, aggiungi il quadrato del termine medio; [dal]la radice quadrata dello stesso togli il termine medio diviso per due volte il quadrato, è il [valore del] termine medio.

Per interpretare il testo, il *numero assoluto* è il coefficiente, $-c$ del termine di grado zero in x; moltiplicare il numero assoluto per il quadrato, significa formare il prodotto $-ac$, mentre il quadrato del termine medio è b^2. Ripercorrendo allora le istruzioni di Brahmagupta perveniamo alla formula risolutiva

$$x=\frac{\sqrt{4a(-c)+(-b)^2}-(-b)}{2a}.$$

Un modo differente di giungere alla stessa conclusione si trova in Bhaskara, nel *Viya-Ganita*, dove si esprime in questi termini ([7], p.137)

Moltiplica entrambi i membri di un'equazione per un numero uguale a quattro volte il [coefficiente] del quadrato e aggiungi a questo un numero uguale al quadrato del numero originale dell'incognita.

Se consideriamo l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ il procedimento di Bhaskara si riduce nei seguenti passaggi: moltiplicazione per $4a$ dell'equazione che ci porta a $4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$; aggiunta del coefficiente b^2 ad ambo i membri dell'equazione: si ottiene $4a^2x^2 + 4abx + b^2 + 4ac = b^2$ da cui segue

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac,$$

e quindi la formula risolutiva.

d) matematici arabi (persiani)

La conquista araba dell'Europa (*cfr.* [12], Cap. 13) fu repentina ed in questo periodo, che si snoda dal 650 al 750 d.C. circa, non vi fu uno sviluppo della matematica. Terminata la fase di espansione si assiste ad un risveglio culturale dell'Islam che permise il recupero e la trasmissione del partimonio della scienza precedente, grazie ad un'ampia opera di traduzione di manoscritti di autori quali Aristotele, Tolomeo ed Euclide. Il centro culturalmente più vivace era Bagdad dove vennero fatti confluire molti studiosi di varia provenienza: dalla Siria alla Persia ed alla Mesopotamia. Questo periodo di mecenatismo raggiunse il culmine con i califfati di al-Mansur, Harun ar-Rashid e, sprattutto, al-Mamun cui si deve la fondazione della *Casa del Sapere* (*Bait al-hikma*) che permetteva di accostare Bagdad a quello che era stata Alessandria d'Egitto. Alla Casa del Sapere apparteneva il matematico ed astronomo persiano Mohammed ibn-Musa al-Khuwaritzmi, morto attorno all'850. La coesistenza a Bagdad di esponenti di culture differenti è di aiuto per comprendere la difficile questione delle fonti cui al-Khuwaritzmi avesse attinto. Sembra certo che al-Khuwaritzmi abbia, almeno in parte, sintetizzato ed esposto in modo sistematico materiale precedente in cui sono riscontrabili influenze sia indiane che della antica civiltà babilonese. In particolare, la giustificazione geometrica dei procedimenti atti a risolvere equazioni di secondo grado, si adatta perfettamente allo schema di ricostruzione di certi problemi presenti nelle tavolette cuneiformi. Per certi versi, l'opera di al-Khuwaritmi segue il destino di quella di Euclide i cui *Elementi* sono una rappresentazione organica di materiale già noto. Essa non è peraltro l'unica opera di questo genere. Le *Necessità logiche in equazioni miste*, composto all'incirca nello stesso periodo da abd-al-Hamid ibn-Turk erano parte di un libro dai caratteri molto simili al trattato di al-Khuwaritzmi.

Il termine *algebra* deriva dal titolo del testo di al-Khuwaritzmi: *Al-Kitah al muhtasar fi isab al-jabr w-al-muqabale*, pubblicato attrono all'anno 830. Nell'edizione di Rosen (1831) dell'*Algebra* di al-Khuwaritzmi [11], i termini *algebra* ed *al-muqabale* sono resi con completamento e riduzione; in alcune note egli afferma come *al-jabr* indichi il recupero di un osso fratturato che diventa, nel traslato matematico, la rimozione di quantità negative, come quando dall'equazione $x^2 = 40x - 4x^2$ si passa a $5x^2 = 40x$, cioè quando si rimuove un

termine negativo trasportandolo dall'altra parte del segno di uguaglianza; il termine *al-muqabala*, significherebbe mettere due cose faccia a faccia, confrontare o compararare che, reso in linguaggio matematico, indica la semplificazione di due quantità positive uguali presenti nei due membri dell'equazione, come nel passaggio da $50+x^2 = 29+10x$ a $21+x^2 = 10x$ in cui 29 viene rimosso da ambo i membri [1]. Gandz osservava alcune anomalie in questi termini dal momento che la parola *jabara* non ha una chiara etimologia in arabo ed il significato di "osso fratturato" è un significato derivato[6]. Non è chiaro come mai si usasse un termine come *muqalābah*, "mettere faccia a faccia, confrontare" per l'operazione di rimozione di una quantità positiva. Con un'indagine nelle altre lingue semitiche, Gandz fu ricondotto a far discendere *jabara* dall'assiro *Gabara* che indicava un uomo maturo, appena lasciata la fanciullezza ed *uguale in rango e valore* agli altri uomini dell'esercito. Inoltre, l'assiro *Gibbōr* indicava l'eroe in grado di *combattere e vincere i rivali di uguale livello* appartententi ad un esercito ostile. La parola *qābala* rappresenterebbe la versione araba dell'assiro Jabara e quindi i due termini sarebbero l'originale assiro e la sua traduzione araba, parole scelte per indicare un'equazione, in generale. In questo senso, secondo Gandz, il titolo dell'opera di al-Khuwaritzmi si può rendere con *Scienza delle equazioni*. Nell'introduzione, al-Khuwaritzmi afferma che la trattazione viene limitata

a quegli aspetti più facili e utili della matematica di cui ci si serve costantemente nei casi di eredità, donazioni, distruzioni, sentenze e commerci e in tutti gli altri affari umani, o quando si vogliono effettuare misurazioni di terreni, scavi di canali, calcoli geometrici e altre cose del genere. ([12], p. 268)

È possibile ([12], p. 272) che le leggi complesse inerenti le eredità in vigore nella legislazione araba abbiano agito da stimolo per lo sviluppo dell'algebra.

Cardano, all'inizio della *Arsa Magna* (1545) dichiara al-Khuwaritzmi fondatore dell'algebra mentre nell'*Algebra* di Bombelli (1572), il testo di al-Khuwaritzmi viene ridotto al rango di *libro di picciol valore*.

Tra le fonti possibili di al-Khuwaritzmi erano stati posti gli *Elementi* euclidei ma, analizzando gli argomenti geometrici presentati da al-Khuwaritzmi con quelli di *Euclide*, si fu poi portati [7] ad escludere influenze euclidee su al-Kuwaritzmi, mentre pare più plausibile l'influenza dello pseudo-Erone anche per la presenza nell'*Algebra* di un esercizio riportato nella *Geometria* pseudo-eroniana, con gli stessi dati numerici e la stessa tecnica risolutiva. Al-Khuwaritzmi suddivide i problemi di secondo grado in sei categorie secondo uno schema che si manterrà inalterato per molti secoli. Precisamente egli considera

1. *Quadrati uguali a radici*, cioè equazioni del tipo $ax^2 = bx$;
2. *Quadrati uguali a numeri*, equivalenti a $ax^2 = c$;
3. *Radici uguali a numeri*, caso degenere: $ax = c$;
4. *Radici e quadrati uguali a numeri*: $bx + ax^2 = c$;

[6] A questo proposito, riportiamo una osservazione di Boyer che afferma come nel *Don Chisciotte* di Miguel Cervantes compaia la parola *algebrista* nel senso di un guaritore in grado di mettere a posto o "restaurare" le dislocazioni delle ossa ([12], p. 280).

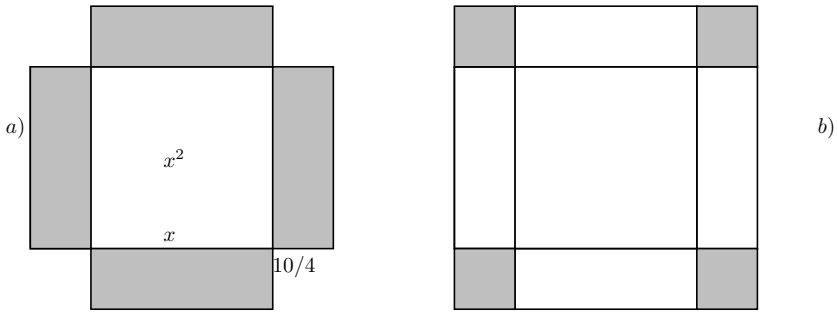

Figura 3.7: Costruzione geometrica che mostra la soluzione dell'equazione $x^2 + 10x = 39$ ad opera di al Khuwaritzmi.

5. *Quadrati e numeri uguali a radici*: $ax^2 + c = bx$;
6. *Radici e numeri uguali a quadrati*: $bx + c = ax^2$.

Poiché i coefficienti sono positivi, questi casi si distinguono per il diverso comportamento delle radici. La risoluzione di un'equazione come ([7], pp.150-152) $x^2+10x = 39$ veniva esposta verbalmente in modo non dissimile da quanto visto nei matematici indiani e giustificata da ragionamenti geometrici.

Nel caso specifico, al-Khuwaritzmi costruisce (Fig. 3.7) un quadrato di lato x e dunque di area x^2 contornato da quattro rettangoli aventi ciascuno un lato in comune con il quadrato ed il lato restante di lunghezza 10/4: la figura così ottenuta ha area pari ad $x^2 + 10x$ che deve uguagliare 39, per risolvere l'equazione. La figura viene modificata in un quadrato grazie all'aggiunta di quattro quadratini, ciascuno di lato 10/4. Il quadrato complessivo ha area $64 = 39 + 4(10/4)^2$ e, per costruzione, ha lato pari ad $x + 5$ per cui deve essere $x = \sqrt{64} - 5 = 3$.

Per valutare la diversa qualità degli argomenti geometrici, confrontiamo la soluzione ora esposta di al-Khuwaritzmi con quella presente nell'*Algebra* di Omar Khayyam (1044-1123(4)) che attinge direttamente dagli *Elementi* di Euclide. Infatti, servendosi della Prop. II.6 degli *Elementi*, Khayyam giustappose (Fig. 3.8) al quadrato di lato $AD = x$ un rettangolo di lati $DC = x$ ed $ED = 10$, così da avere area $10x$, mentre quella del rettangolo AG è pari a $x^2 + 10x = 39$, per via dell'equazione da risolvere. Ora, se F è il punto medio di ED, grazie alla Prop. II.6 si ha

$$\mathcal{R}(AD, AE) + \mathcal{Q}(DF) = \mathcal{Q}(AF)$$

ed essendo $DF = 5$ si ottiene

$$39 + 25 = AF^2$$

da cui si ricava $AF = 8$ ed infine $AD = x = 3$.

Vi è un aspetto importante dell'opera di al-Khuwaritzmi da considerare, cioè l'accettazione della esistenza di *due* soluzioni (positive) per certe equazioni di

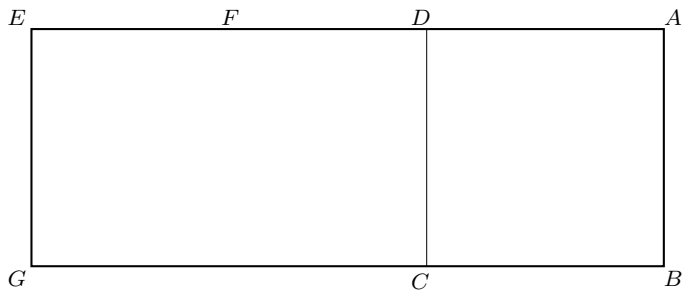

Figura 3.8: Costruzione geometrica che mostra la soluzione dell'equazione $x^2 + 10x = 39$ ad opera di al Khayyam.

secondo grado, della forma $x^2 + a = bx$. Considerando l'equazione $x^2 + 21 = 10x$ ([7], pp.154-156) e dopo avere riportato in forma retorica i passi per ottenere la soluzione $x = 3$, al-Khuwaritzmi osserva

oppure, puoi sommare la radice alla metà delle radici; la somma è 7; questa è la radice del quadrato che hai cercato e il quadrato stesso è 49. Quando ti imbatti nel tipo che porta a questo caso verifica la sua soluzione con la somma, e se questa non serve, allora sarà certamente la sottrazione.

Occorre addizionare dunque la radice ($\sqrt{25-21}$) alla metà delle radici che vale 5, ottenendo 7, radice ulteriore oltre a 3. In altre parole, al-Khuwaritzmi sta illustrando il segno $\pm$ che figura nella formula risolutiva per far passare da una all'altra radice. Tuttavia al-Khuwaritzmi considera una sola delle radici essere la *vera* soluzione del problema, atteggiamento che sarà ancora presente molto più tardi in Fibonacci. La giustificazione geometrica (Fig. 3.9) consiste nel costruire il quadrato AD di lato x e giustapporre un rettangolo AN di area 21, in modo che l'intero rettangolo CN abbia area $x^2 + 21 = 10x$, a motivo dell'equazione da risolvere. Dunque, poiché CN ha altezza x, si conclude che $CH = 10$; preso ora il punto medio G di CH, si tracci GT parallelo a CD e lo si prolunghi fino in K, in modo che $AG = GK$: il quadrato KN ha lato di lunghezza 5 unità e dunque area 25. Su KM si riporta il segmento $KL = KG$ e si completa il quadrato GL. I rettangoli HL e BG sono congruenti e dunque il quadrato GL ha area 4, pari alla differenza tra 25, area di KN, e 21, area di HL ed HT. Dunque $GK = GA = 2$ ed $x = AC = CG - AG = 5 - 2 = 3$ risolve il problema. Per trovare l'altra soluzione, al-Khuwaritzmi sfrutta quella appena ottenuta e costruisce il quadrato su RC (Fig. 3.10), aggiungendovi il rettangolo HP di area pari a 21 in modo da ottenere il rettangolo HO, di area $10RC$. In definitiva si ha

$$RC^2 + 21 = 10RC,$$

che dimostra come $RC = 7$ risolva l'equazione di partenza.

A proposito di questa equazione, al-Khuwaritzmi avverte che

Devi sapere che, quando prendi la metà delle radici in questa equazione e poi moltiplichi tale metà per se stessa, se ciò che risulta dalla moltiplicazione è infe-

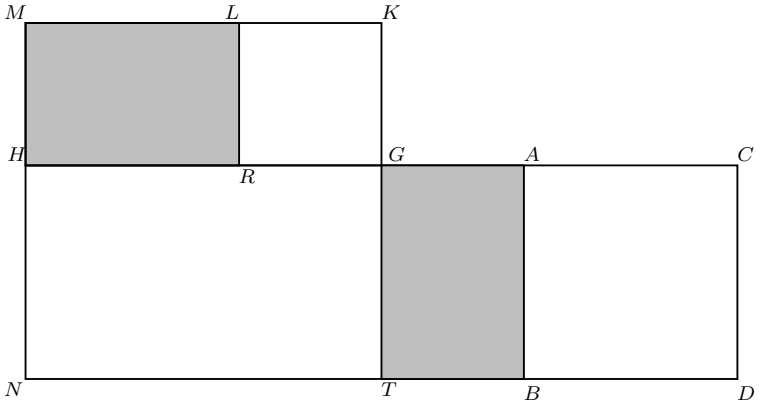

Figura 3.9: Costruzione geometrica che mostra la soluzione dell'equazione $x^2 + 21 = 10x$ ad opera di al Khuwaritzmi.

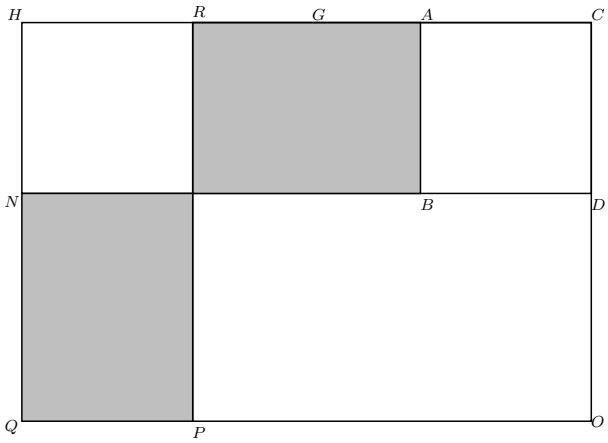

Figura 3.10: Costruzione geometrica che mostra la seconda soluzione dell'equazione $x^2 + 21 = 10x$.

riore alle succitate unità che accompagnano il quadrato, non avrai un'equazione ([12], p. 269)
che ripropone il diorisma già osservato in Euclide a proposito dei problemi di applicazione di aree.

La consapevolezza della possibile molteplicità di soluzioni non è un tratto originale di al-Khuwaritzmi: ad esempio, nella matematica babilonese sono testimoniate diverse circostanze in cui questo fenomeno era stato riconosciuto.

e) il Rinascimento italiano

L'opera di Leonardo Pisano venne divulgata da una schiera di matematici, noti come *maestri d'abaco*, tra cui ricordiamo Paolo dell'Abaco (?-1367) che nel *Trattato delle quantità continue* sostenne che l'uso delle proporzioni fosse

fondamentale per l'algebra, anticipando una posizione che sarà al centro del programma di Viète. Un altro maestro d'abaco di un certo rilievo fu Antonio de' Mazzinghi (1353-1383), allievo di dell'Abaco e che si segnala per la legittimazione dell'uso di radici negative di equazioni ausiliarie, allo scopo di ottenere le radici positive di un'altra equazione. Un problema, ripreso da [7], pp.164-165, serve a chiarire il procedimento seguito da de' Mazzinghi:

Fa di 10, 2 parti che moltiplichata la prima per sé et quel che fa tratto di 97 e di quel che rimane preso la radice et serbata, e di poi la seconda parte per sé moltiplicata et quello che fanno tratto di 100 e del rimanente preso la sua radice et aghunto choll'altra radice, faccia 17. Adimandasi quanto è ciascuna parte per sé.

Formalizzando, occorre risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ \sqrt{97 - x^2} + \sqrt{100 - y^2} = 17 \end{cases}$$

compito che Mazzinghi assolve ponendo $x = 5 + u$ ed $y = 5 - u$, trasformando la seconda equazione in

$$\sqrt{72 - 10u - u^2} + \sqrt{75 + 10u - u^2} = 17$$

che, dopo aver eliminato tutti i radicali con un doppio elevamento al quadrato, diventa

$$389u^2 + 30u = 359$$

che viene risolta da $u = -1$ ed $u = \frac{359}{389}$: Mazzinghi utilizza solo la soluzione negativa ed ottiene la soluzione del problema in interi positivi, $x = 4$ ed $y = 6$.

Dai maestri d'abaco si passa a Luca Pacioli, autore della *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proporzionalità* che, pubblicata nel 1494, costituisce il primo testo completo matematico a stampa. Qui Pacioli, riprendendo un'idea abbozzata da Fibonacci, applica l'algebra alla risoluzione di problemi geometrici, un passaggio concettualmente importante nel lungo e faticoso cammino di affrancamento dell'algebra dalla tutela della geometria. In particolare, Pacioli ritiene l'algebra in grado di affrontare, come la geometria, le grandezze continue e quindi i numeri *sordi* od *irrazionali*, parola che proprio con Pacioli entra nel glossario dei termini matematici. Pacioli, quando incontra due soluzioni positive di uno stesso problema vede in questo un difetto della costruzione, mostrando di non riuscire appieno a valutare opportunamente la molteplicità di soluzioni ad uno stesso problema.

Operando una scelta tra le presentazioni delle equazioni di secondo grado nei testi algebrici del XVI secolo, presento l'esposizione di Girolamo Cardano contenuta nel Capitolo V dell'*Ars Magna*, di Simon Stevin proposta nell'*Arithmetique* e di François Viète, riportata nel *De aequationum recognitione et emendatione* (pubblicato postumo nel 1615).

Cardano aderisce alla suddivisione in casi adottata da al-Khuwaritzmi per cui le equazioni di secondo grado complete a coefficienti a, b, c positivi sono ripartite in tre classi distinte

$$ax^2 = bx + c, \quad ax^2 + bx = c, \quad ax^2 + c = bx$$

mentre il caso $ax^2 + bx + c = 0$ non viene contemplato perché non può fornire radici positive. Questa distinzione comporta che Cardano presenti tre formule risolutive diverse che differiscono tra loro per alcuni cambiamenti di segno. Per facilitarne l'apprendimento Cardano, che si limita a considerare $a = 1$, propone una regola mnemonica:

Querna, da bis

Nuquer, admi

Requan, minue dami. ([13], p. 36)

Querna è l'abbreviazione di *quadratus aequatur rebus et numero*, per cui la regola riguarda $x^2 = bx + c$ e *da bis* significa "aggiungi due volte" in quanto occorre aggiungere c a $\frac{b^2}{4}$ sotto radice e la radice va aggiunta a $\frac{b}{2}$: $x = \sqrt{\frac{b^2}{4} + c} + \frac{b}{2}$. *Nuquer* si riferisce a *numerus aequatur quadrato et radicibus*, cioè a $c = bx + x^2$ ed *admi* si riferisce al fatto che prima si aggiunge c a $\frac{b^2}{4}$ sotto radice e poi si sottrae dalla radice $\frac{b}{2}$: $x = \sqrt{\frac{b^2}{4} + c} - \frac{b}{2}$. Infine *Requan* sta per *Res aequantur quadrato et numero*, cioè a $bx = x^2 + c$ per cui la regola *minue dami* richiede di sottrarre c da $\frac{b^2}{4}$ per poi aggiungere $\frac{b}{2}$: $x = \sqrt{\frac{b^2}{4} - c} + \frac{b}{2}$.

La formula risolutiva nella forma che sostanzialmente conosciamo noi, cioè indipendente dalla considerazione dei diversi casi che si possono presentare a seconda dei segni dei coefficienti, si trova nella *Arithmetique* (1585) di Simon Stevin. Ad onor del vero Michael Stifel (1487-1567) aveva già tentato nel 1544 di ottenere lo stesso risultato nella *Arithmetica Integra* era approdato ad un'altra regola mnemonica indicata con l'acronimo *Amasias*:

A numero radicum incipe, eumque dimidiatum, loco ejus pone dimidium illius, quod in loco suo stet donec consumata sit tota operatio;

Multiplica, dimidium illum positum, quadrate.

Adde vel Subtrahe iuxta signi additorum, aut signi subtractorum, exigentiam.

Invenienda est radix quadrata, ex summa additionis tuae, vel ex subtractionis tuae relicto.

Adde aut Subtrahe iuxta signi aut exempli tui exigentiam[7] ([14], p. 241)

Come si vede, Stifel considera l'espressione $x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 \pm c} \pm \frac{b}{2}$ lasciando alle esigenze del solutore la scelta dei segni, a seconda della tipologia di equazione trattata.

Stevin che pure distingue vari tipi di equazione di secondo grado riesce a racchiudere in una sola equazione risolutiva tutti i casi che si possono presentare. Nella seconda parte dell'*Arithmetique* Stevin affronta il seguente problema (Problema LXVIII):

[7] Inizia dal numero delle radici e, dopo averlo dimezzato, poni tale metà al suo posto dove rimarrà finché non sia completata l'intera operazione; Moltiplica la metà precedente per se stessa. Aggiungi o sottrai, a seconda del bisogno. Occorre trovare la radice quadrata della tua somma ovvero del residuo della tua sottrazione. Aggiungi o sottrai a seconda del segno richiesto dal tuo esempio.

Siano dati tre termini, il primo dei quali è (2), il secondo è (1)(0), il terzo un numero algebrico qualunque: trovare il quarto proporzionale.[8] ([15], p. 595)

Notiamo il modo particolare adottato da Stevin per formulare un'equazione di secondo grado $x^2 = bx + c$. Essa viene vista come proporzione

$$\frac{x^2}{bx+c} = \frac{x}{p}$$

dove p è il quarto proporzionale, il valore da attribuire all'incognita per verificare la proporzione. A noi sembra un'inutile complicazione ma, agli occhi di Stevin e dei suoi contemporanei, questa posizione permetteva di ricondurre la soluzione di un'equazione ad un problema *del tre semplice*, con cui si era molto più abituati a lavorare. Formulato il problema, Stevin inserisce una nota che è la chiave per raggruppare le tre formule risolutive di Cardano e Stifel

Il binomio del secondo termine assegnato nel problema si può presentare in tre forme diverse, cioè: $(1) + (0)$, $-(1) + (0)$, $(1) - (0)$ *(....) noi troveremo un solo modo [di risolvere l'equazione], con il quale si potrà eseguire l'operazione in tutti i tre casi senza variare una sillaba.* [9]([15], p. 595).

Quando Stevin parla di binomio del tipo $(1)+(0)$ intende riferirsi al binomio $ax+b$, con a e b positivi ma, soprattutto, nel caso $-(1)+(0)$ intende $-ax+b$ ed è proprio questo mettere in evidenza il segno negativo che permette di superare la casistica incontrata in Stifel e Cardano. Stevin fornisce la regola, che poi dimostra geometricamente, per equazioni a coefficienti numerici. Ad esempio, per il caso $-(1) + (0)$ egli considera $x^2 = -6x + 16$ ed esprime la formula risolutiva in questi termini:

La metà di -6 *(dal termine* $-6(1)$*) è* -3*; il suo quadrato (siccome* -3 *per* -3 *fa* $+9$*) è 9; A questo stesso si aggiunga lo (0) assegnato, cioè* 16*; la somma è 25; la sua radice quadrata è 5; a questa si aggiunga il* -3 *ottenuto in precedenza, il risultato è 2.*[10] ([15], p. 599)

Invece di dire *aggiugi o sottrai* come Stifel, Stevin osserva che sottrarre un numero equivale ad addizionare il suo opposto e dunque riesce nell'intento.

Viète, pur adottando un simbolismo più avanzato, è più conservatore in quanto ritorna alla classica distinzione dei tre casi in cui vi è almeno una radice *vera*, cioè positiva. Per questo, egli considera l'equazione

$$A^2 + 2BA = Z$$

nell'incognita A ed introduce una nuova incognita $E := A + B$ allo scopo di liminare il termine lineare (le formule si trovano nella sezione *De reductione quadratorum adfectorum ad pura* del *De Æquationum Recognitione ac Emendatione*

[8] Estant donnez trois termes, des quels le premier (2), le second (1)(0), le troisiesme nombre algebraique quelconque: Trouver leur quatriesme proportionel.

[9] Le binomie du second terme donnée de ce probleme se peut rencontrer en trois differences à sçavoir: $(1) + (0)$, $-(1) + (0)$, $(1) - (0)$ (....) nous demonstrerons une seule maniere, par laquelle sans varier d'une syllabe, l'operation sera en toutes trois la mesme.

[10] La moitie de -6 (des $-6(1)$) est -3; Son quarré (car -3 par -3 faict $+9$) est 9; Au mesme adjoute le (0) donné, qui est 16; donne somme 25; sa racine quarré 5; a la mesme aioute -3 premier en l'ordre, faict 2.

Tractatus duo). Infatti, sostituendo nell'equazione $A = E - B$ si ricava

$$E^2 = Z + B^2$$

Come conseguenza, Viète ricava la regola

$$A = \sqrt{Z + B^2} - B :$$

notiamo come il valore negativo della radice *non* sia considerato affatto perché porterebbe ad una soluzione negativa, considerata ancora *non* ammissibile. Viète conclude questa parte con un esempio numerico che illustri il metodo prendendo $B = 1$ e $Z = 20$ che fornisce la radice $\sqrt{21} - 1$. Di seguito, ecco l'originale di Viète

Se A quad +B2 per A, è uguale a Z piano. A+B sia E. Dunque E quad, è uguale a Z piano +B quad.

Conseguenza: Così $\sqrt{Z piano + B quad.} - B$ *è A, di cui si cercava dapprima il valore.*

Sia B uguale ad 1, Zpiano uguale a 20 ed A uguale ad 1. $1Q + 2N$*, sia uguale a 20 sarà risolta da* $N.\sqrt{21} - 1.$[11] ([16], p. 129)

Come osservato nel Cap. I, Viète cambia notazione quando considera equazioni numeriche: N sta per *numerus* e Q sta per *quadratus* e dunque $1Q + 2N$ si legge $x^2 + 2x$.

Ora Viète considera l'equazione

$$A^2 - 2BA = Z$$

nell'incognita A. Posto nell'equazione $A = E + B$ si ricava

$$E^2 = Z + B^2$$

da cui Viète ottiene

$$A = \sqrt{Z + B^2} + B :$$

l'esempio numerico ha gli stessi coefficienti di prima.

Se A quad -B per 2A, uguale a Z piano. A-B sia E. Dunque E quad è uguale a Z piano +B quad.

Conseguenza: Così $\sqrt{Z piano + B quad.} + B$ *è A, di cui prima si cercava il valore.*

Sia B uguale ad 1, Z piano uguale a 20 ed A uguale ad 1 $N1Q - 2N$ *uguale a 20 è risolta da* $N.\sqrt{21} + 1.$[12] ([16], p. 130)

[11] Si A quad +B2 in A, aequetur Z plano. A+B esto E. Igitur E quad, aequabitur Z plano +B quad. Consectarium: Itaque $\sqrt{Z \text{plani} + B \text{quad.}} - B$ sit A, de qua primum quaerebatur.
Sit $B1$ Z planum 20. $A\ 1N1Q + 2N$, aequatur 20 et fit $N.\sqrt{21} - 1$.

[12] Si A quad -B in A2, aequetur Z plano. A-B esto E. Igitur E quad, aequabitur Z plano +B quad.
Consectarium: Itaque $\sqrt{Z \text{plani} + B \text{quad.}} + B$ sit A, de qua primum quaerebatur.
Sit $B1$ Z planum 20. $A\ 1N1Q - 2N$, aequabitur 20 et fit $N.\sqrt{21} + 1$.

Anche in questo caso, le soluzioni negative non sono prese in considerazione. Infine, come ultimo esempio, Viète considera l'equazione

$$-A^2 + 2DA = Z$$

e pone alternativamente $A = D \pm E$ che in ogni caso fornisce

$$E^2 = D^2 - Z$$

per ricavarne la regola

$$A = D \mp \sqrt{D^2 - Z}$$

dove ora compaiono le due radici perché entrambe positive.

Sia D per 2 A -A quad uguale a Z piano. D-E, o D+E sia A. E quad è uguale a D quad -Z piano.

Conseguenza: Così, D meno o più $\sqrt{D quad. - Z piano}$ *è uguale ad A, di cui prima si cercava il valore.*

Sia $D = 5$ *Z piano uguale a 20 ed* $A = 1\ 10N - 1Q$ *uguale a 20 è risolta da* $N.5 - \sqrt{5}$*, oppure da* $N.5 + \sqrt{5}$.[13] ([16], p. 130)

In questo stesso trattato, Viète aveva già presentato le equazioni appena viste come la traduzione di tre proporzioni, secondo uno schema a lui caratteristico e che discuteremo più a lungo nel Cap. 5.

L'equazione $A^2 + BA = Z^2$, riscritta nella forma $A(A+B) = Z^2$, si riformula come $A : Z = Z : (A + B)$ e la sua soluzione si traduce in quella del problema di trovare il termine minore di questa proporzione, noto il termine medio e la differenza tra il termine maggiore ed il minore:

Vi sono tre grandezze in proporzione continua e Z è il medio proporzionale, la differenza degli estremi è B; ed A è l'estremo minore.[14] ([16], p. 85)

Similmente, $A^2 - AB = Z^2$ viene riscritta come $A(A - B) = Z^2$, cioè $(A - B) : Z = Z : A$ ed il problema è, dato il termine medio e la differenza tra gli estremi, trovare il termine più grande dei tre che formano la proporzione continua:

Vi sono tre grandezze in proporzione continua e Z è il medio proporzionale, B è la differenza degli estremi ed A l'estremo maggiore.[15] ([16], p. 85)

Infine $AB - A^2 = Z^2$ si pone nella forma $A(B - A) = Z^2$, che ammette due interpretazioni: $(B - A) : Z = Z : A$ oppure $A : Z = Z : (B - A)$: in ambo i casi è noto il termine medio Z e la somma degli estremi e si richiede il termine minore o maggiore della proporzione:

---

[13] *Si D2 in A -A quad, aequetur Z plano. D-E, vel D+E esto A. E quad, aequabitur D quad -Z plano.*

Consectarium: Itaque, D minus, plusve $\sqrt{D quad. - Z plani}$ *sit A, de qua primum quaerebatur.*

Sit D5 Z planum 20. A $1N10N - 1Q$*, aequatur 20 et fit* $N.5 - \sqrt{5}$*, vel* $N.5 + \sqrt{5}$.

[14] Sunt tres proportionales radices quarum media est Z differentia vero extremarum B; et sit A minor extrema.

[15] Sunt tres proportionales, quarum media est Z, differentia vero extremarum B; et sit A major extrema.

Vi sono tre grandezze in proporzione continua e Z è il medio proporzionale, B è la somma degli estremi; ed A l'estremo minore o maggiore.[16] ([16], p. 86).

Concludiamo questa esposizione dei principali metodi di soluzione delle equazioni di secondo grado con il metodo geometrico esposto da Descartes nella *Géométrie* e che testimonia un modo nuovo di risolvere le equazioni per via geometrica, non più con il completamento del quadrato ma ricorrendo all'intersezione di opportune curve algebriche. Sia data l'equazione ([17], pp.12–13)

$$z^2 = az + b^2$$

dove i coefficienti a e b sono considerati positivi. Si consideri il triangolo rettangolo LMN avente i cateti $MN = b$ ed $LN = \frac{1}{2}a$. Si consideri la circonferenza di centro N e raggio $\frac{1}{2}a$ e dunque tangente in L ad LM. Prolungata l'ipotenusa MN fino al punto O dove interseca la circonferenza appena tracciata, OM è la soluzione z dell'equazione proposta. Infatti, per il teorema della tangente e della secante, LM è medio proporzionale tra l'intera secante $OM = z$ e la sua parte esterna $PM = z - a$: in effetti $b^2 = z(z - a)$ equivale all'equazione proposta (Fig. 3.11).

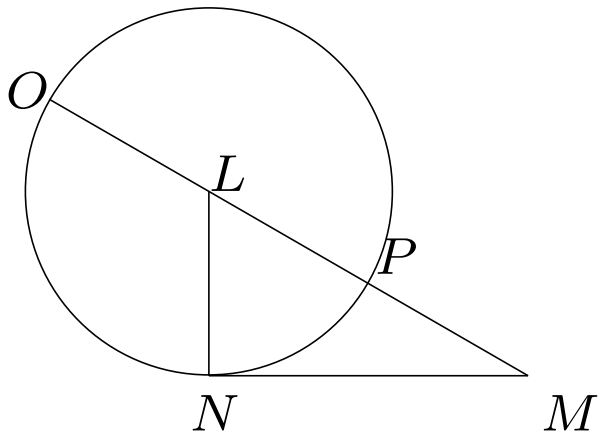

Figura 3.11: Risoluzione dell'equazione di secondo grado $z^2 = ax+b^2$ presentata da Cartesio nel I Libro della *Géométrie*.

[16]Sunt tres proportionales, quarum media est Z, aggregatum vero extremarum B; et sit A minor majorve extrema.

Bibliografia

[1] J.-P. Tignol: *Galois' Theory of Algebraic Equations.* World Scientific, Singapore, (2001).

[2] R. Herz-Fischler: *A Mathematical History of the Golden Number.* Dover, Mineola (NY), (1998).

[3] E. Bortolotti: Primordi della geometria analitica: l'algebra geometrica di Paolo Bonasoni nel Mss. 314 della Biblioteca Universitaria di Bologna. In *Studi e Ricerche sulla Storia della Matematica in Italia nei secoli XVI e XVII.* Zanichelli, Bologna, (1928).

[4] E. Bortolotti: L'algebra nella scuola matematica bolognese del secolo XVI. *Periodico di Matematiche* **5** (S. IV), 147-192, (1925).

[5] Euclide: *Tutte le Opere.* A cura di F. Acerbi, con testo greco a fronte. Bompiani, Milano, (2007).

[6] S. Unguru: On the need to rewrite the history of Greek mathematics. *Archive for History of exact Sciences*, **15**, (1975), 67-114.

[7] S. Maracchia: *Storia dell'Algebra.* Liguori, Napoli, (2005).

[8] B.L. van der Waerden: Defence of a "Shocking" point of view. *Archive for History of exact Sciences*, **16**, (1976), 199-210.

[9] *Gli Elementi d'Euclide e la critica antica e moderna* Editi da F. Enriques col concorso di diversi collaboratori. *Libro X*, Zanichelli, Bologna, (1932).

[10] E. Artom: Le equazioni di secondo grado presso i greci. *Periodico di Matematiche* **2** (S. IV), 326–342, (1922).

[11] S. Gandz: The origin of the term "Algebra". *American Mathematical Monthly*, **33**, 437–440, (1926).

[12] C.B. Boyer: *Storia della Matematica.*, Mondadori, Milano, (1990).

[13] G. Cardano: *Ars Magna.* Traduzione inglese a cura di T.R. Witmer, Dover, Mineola (NY), (1993).

[14] M. Stifel: *Arithmetica Integra*. Petreium, Norimberga, (1544).

[15] S. Stevin: *L'arithmetique*. In *The Principal Works of Simon Stevin. IIB: Mathematics* a cura di D.J. Struik, Amsterdam, (1958).

[16] F. Viète: *De Æquationum Recognitione ac Emendatione Tractatus duo*. In *Francisci Vietæ Opera Mathematica*, a cura di F. van Schooten. Bonaventura e Abraham Elzeviri, (1646).

[17] *The Geometry of René Descartes with a fac-simile of the first edition*, translated from the French and Latin by D.E. Smith and M.L. Latham, Dover, New York, (1954). Riproduzione dell'edizione del 1925 pubblicata da Open Court Publishers.